EXAMEN DE FIN DU SECOND SEMESTRE
EPREUVE DE MATHEMATIQUES DISCRETES

Niveau : L1S2 *Durée : 02 heures*

Exercice 1 : *(7pts)* On désigne par A l'ensemble des entiers naturels inférieurs ou égaux à 2011.

1- a) En utilisant le fait que 2011 est premier, montrer que l'équation
(E): $67x + 2011y = 1$ admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

b) Vérifier que le couple $(-30; 1)$ est une solution particulière de (E).

c) Montrer que les solutions de (E) sont les couples $(2011k - 30; -67k + 1)$; $k \in \mathbb{Z}$.

d) Déduire la valeur de l'entier naturel x inférieur ou égal à2011 vérifiant $67x \equiv 1[2011]$. (L'entier x trouvé s'appelle l'inverse de 67 modulo 2011).

2- a) Soit a un entier, montrer que $a^2 \equiv 1[2011]$ si et seulement si $a \equiv 1[2011]$ ou $a \equiv -1[2011]$. (On pourra utiliser que si un entier p divise ab alors p divise a ou p divise b).

b) En déduire que 1 et 2010 sont les seuls entiers de A qui sont égaux à leurs inverses.

Exercice 2 : *(3pts)* Dans $\mathbb{R}^2$, on considère la relation binaire $\mathcal{R}$ définie par :

$$x\mathcal{R}y \quad ssi \quad x^2 - y^2 = x - y$$

1- Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2- Déterminer les classes d'équivalence selon $\mathcal{R}$.

Exercice 3 : *(4pts)* Choisir juste la lettre qui correspond à la bonne réponse dans la liste.

1- La combinatoire est la branche des mathématiques discrètes qui concerne :
- a) L'Algèbre abstraite
- b) Les problèmes dérivés
- c) Les problèmes intégrés

2- Un(e) ……… est un énoncé qui est soit vrai soit faux, mais pas les deux à la fois
- a) Argument
- b) Conclusion
- c) Bi-conditionnelle
- d) Proposition

3- L'ensemble $\{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$ est désigné par :
- a) $[a, b[$
- b) $]a, b]$
- c) $]a, b[$
- d) $\{a, b\}$

4- $P \wedge Q$ est appelé ……… de P et Q
- a) Conditionel
- b) Conjunction
- c) Bi-conditionel
- d) Disjunction

5- Dans l'implication $P \Longrightarrow Q$, P est appelée
- a) Conséquence
- b) Prémisse
- c) Conditionnelle

d) Enoncé

6- Si $R = \{(2,1),(3,1),(5,1),(5,4)\}$, alors

a) $R^{-1} = \{(2,1),(3,1),(5,1),(4,5)\}$
b) $R^{-1} = \{(2,1),(3,1),(5,1),(5,4)\}$
c) $R^{-1} = \{(1,2),(1,3),(1,5),(4,5)\}$
d) $R^{-1} = \{(2,1),(3,1),(1,5),(4,5)\}$

7- Considrer l'ensemble de toutes les droites dans le plan. Si la relation R est définie par 'être parallèle à' alors R est

a) Réflexive
b) Symétrique
c) Transitive
d) Réflexive, symétrique et transitive

8- La proposition $\neg P \vee (P \vee Q)$ est une

a) Tautologie
b) Contradiction
c) Equivalence logique
d) Aucune des réponses ci-dessus

EXERCICE 4 : *(6pts)*Soit $P = \{2,3,4,5\}$. Considérer les relations définies sur P par :

$$R = \{(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5),(5,3)\}$$
et
$$S = \{(2,3),(2,5),(3,4),(3,5),(4,2),(4,3),(4,5),(5,2),(5,5)\}$$

1- Déterminer les matrices de R et S.
2- Déssiner le graphe orienté réprésentant R
3- Déterminer la fermeture transitive de R.
4- En utilisant les matrices de R et S, déterminer les relations composées :

a) $R \circ S$
b) $R \circ R$
c) $S \circ R$